Einige Mathematik-Wiederholungsaufgaben vor dem Studienbeginn

Prof. Dr. rer. nat. habil. Volkmar Friedrich

Angeregt durch Erfahrungen aus der Mathematik- und Informatikausbildung von Ingenieuren sowie aus Wiederholungsveranstaltungen vor dem Studium an Berufsakademien bin ich zum Entschluss gekommen, doch einmal sich wiederholende Unsicherheiten und Fehlschlüsse zusammenzutragen.

Fehlerquelle Nummer 1 ist die mangelhafte Konzentration auf die zu lösenden Aufgaben, durch die sich die unmöglichsten Fehler schon dort einschleichen, wo man sichere Fertigkeiten erwartet. Die simpelsten Rechengesetze werden „innovativ“ außer Kraft gesetzt - so wird aus $x + y = 5$ beim Umstellen $y = 5x$ statt $y = 5 - x$. Nach dem bloßen Abschreiben sieht eine Zahl plötzlich anders aus, ihr fehlt jetzt das Vorzeichen – nachlässiges Schreiben der Ziffern verwandelt die 6 z.B. in eine 0, aus 4/2 wird dank eines zu kleinen Divisionszeichens / auf der nächsten Zeile 4,2. **Mit einer „derart sehr persönlichen“ solchen Handschrift belasten Sie sich nur selbst!** Diese Beispiele sind nicht Ausdruck mangelnder Fertigkeiten – sondern stehen einfach für absolute Schludrigkeit.

Fehlerquelle 2 sind aber tatsächliche Schwächen bereits bei Verwendung der elementaren Rechengesetze. Da soll nun schnell der Taschenrechner helfen – möglichst der CAS-TR, welcher nicht nur mit Zahlen rechnen kann sondern auch Formeln umformen oder ganze Gleichungen lösen kann. Da dessen Bedienungsanleitung aber viele, viele Seiten umfasst, werden diese nicht gelesen und eine computergerechte Formulierung einer Aufgabe wird dann zur Glückssache, da eine vollständige Übereinstimmung mit den in Jahrhunderten geprägten mathematischen Schreibweisen nicht vorhanden ist (und sicher auch nicht sinnvoll ist). Damit gesellt sich zu den Schwächen im Umgang mit den Gesetzen der Mathematik auch fehlende Kenntnis vom Unterschied der „klassischen mathematischen Schreibweisen“ zur Formulierung äquivalenter Aufgabenstellungen für den Rechner.

Eine Besonderheit des nachfolgenden Materials ist deshalb, die Möglichkeiten moderner Hilfsmittel (Taschenrechner, Tabellenkalkulation, …) kritisch zu bewerten – so sollten natürlich genutzt werden, wo sie eine echte Zeitersparnis bedeuten – die vollständige Abhängigkeit von Ihnen, um $1+1$ oder $5*7$ auszurechnen, kann aber nur der anstreben, der sich auf Dieter Bohlen und Co mehr konzentriert als auf das Erlangen einer beruflichen Qualifikation..

Hinzu kommt der häufig falsche Gebrauch bestimmter Verben: Ein Funktionswert wird an der Stelle x **berechnet**, es wird der Funktionswert an der Stelle x **bestimmt**, die Funktion wird an der Stelle x **ausgewertet –** aber sie wird nicht *„gelöst“*. Eine Aufgabe (z.B. eine Gleichung oder eine Extremwertaufgabe) wird **gelöst**. Gleichungen und Ungleichungen können **umgeformt** werden – kritischer ist es mit dem „**Vereinfachen**“, das die falsche Vorstellung bedient, dass bestimmte mathematische Objekte – etwa ein Polynom (= ganze rationale Funktion) - immer eine bestimmte „normierte“ Form haben müssten. Eine Umformung hat immer das Ziel, nachfolgende Operationen einfacher werden zu lassen – was einfacher ist, hängt aber vom konkreten Ziel ab, wie später an Beispielen auch gezeigt wird.

Und vor einer weiteren Umstellung steht der Schüler, der Student werden will. Die Schulmathematik stellt fast immer Einzelaufgaben und vergisst dabei, dass der künftige Ingenieur in der Regel vor einer Variantenrechnung steht, nach der er erforderliche Entscheidungen fällt. Der Schüler ist zufrieden, eine konkrete Aufgabe unter maximaler Nutzung der zufällig gerade vorhandenen Zahleneigenschaften richtig gelöst zu haben – er wird nicht systematisch auch an den Gedanken von **Algorithmen** herangeführt, die <u>jede</u> Aufgabe aus einer ganzen Aufgabenklasse zu lösen erlauben und damit die Automatisierung „geistiger Arbeiten“ ermöglichen. Auch auf diesen Problemkreis soll im Weiteren mit hingewiesen werden

Die Abschnitte 4, 8, 9, 10 werden im Studium (in Mathematik oder Informatik) wiederholt und vertieft, die in den Abschnitten 1, 2, 3 und 5, 6, 7 wiederholten Arbeitstechniken werden aber einfach vorausgesetzt. Und Sie sollten natürlich bei unklarem Geschehen an der Tafel sofort fragen – oder wenn dies nicht möglich ist – das in Ihrer Nachschrift anmerken, um danach zu fragen. Sie sollten sich von einer nicht verstandenen Umformung aber nicht so ablenken lassen, dass Sie der weiteren Darlegung nicht mehr folgen und sich nur dieser einen Umformung zuwenden. Dann verpassen Sie an anderer Stelle den Anschluss.

1. Banale Fehler im Umgang mit den Grundrechenarten

Rechenoperationen der 1. Stufe

Neben vielen Faselfehlern im Umgang mit dem Minuszeichen auch bei reiner Zahlenrechnung ist die **Doppelverwendung von ‚–' als Operationszeichen für die Differenz und als Vorzeichen für negative Zahlen** eine Fehlerquelle, sobald der negative Ausdruck beim Einsetzen nicht konsequent geklammert wird.
Beim Einsetzen von $-a/4$ für u und $-a$ für v ergibt sich somit über $u - v = -a/4 - (-a)$ und die Vorzeichenregeln $-(+a) = +(-a) = -a$ und $-(-a) = +a$ das Ergebnis $u - v = \frac{3}{4}a$. Vergisst man aber $-a$ zu klammern, entsteht der (falsch geschriebene) Ausdruck $-a/4 - -a$, bei dem ich schon $-5/4a$ als Antwort erlebt habe.

Rechenoperationen der 2. Stufe

Die klassische Mathematik verzichtet in ihren Formeln auf ein Operationszeichen für die Multiplikation und verwendet für die Division häufig einen Bruchstrich. Der Verzicht auf ein Zeichen für die Produktbildung ist aber nur solange möglich, wie Variable grundsätzliche nur durch <u>einen</u> Buchstaben (eventuell angereichert mit Indizes) bezeichnet werden. Bei einer informatikorientierten Schreibweise ist ein Operationszeichen (in der Regel *) unverzichtbar.
Beim Umgang mit Zahlen ist der Schüler daran gewöhnt, ein Multiplikationszeichen – meist ‚·' – zu setzen und er schreibt nicht für ab mit a = 24 und b = 42, dass ab = 2442 sei.
Fehlt aber dieses konsequente Einfügen eines Multiplikationszeichens beim Ersetzen einer Variablen durch eine andere Bezeichnung, so ist der folgende Fehler beim Ersetzen von $r = -a$ und $p = 5$, $q = 10$ und $a = 30$ fast unvermeidlich

$$\frac{p}{q}r = \frac{p}{q} - a = \frac{5}{10} - 30 = -29{,}5 \quad \left(\text{statt } \frac{p}{q}r = \frac{p}{q}\cdot(-a) = \frac{5}{10}\cdot(-30) = -15\right)$$

Erwartet wird von einem Studienanfänger der sichere Umgang mit den Rechenregeln für Addition/Subtraktion, Multiplikation und Division von Brüchen (sowohl mit Zahlen als auch mit Ausdrücken, die Variable enthalten) – wobei Sie sich für die letzte dieser Operationen angewöhnen sollten, den Hauptbruchstrich auch entsprechend länger zu schreiben.

$$\mathbf{\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}}\ ;$$ Summanden auf gemeinsamen **Hauptnenner** erweitern $$\mathbf{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}}$$

$$\mathbf{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}$$ Division durch einen Bruch durch Multiplikation mit dem **Reziproken des Nenners** ausführen

Die entsprechenden Schreibweisen „ohne Bruchstrich" bei der Eingabe in Rechner sind für die linken Seiten der drei angegebenen Brüche

a/b+c/d **a/b*c/d** **a/b/(c/d)**.

Die letztgenannte Form unterstreicht bereits die Bedeutung des richtigen Klammerns. Der Rechner arbeitet – soweit ihn nicht Klammern etwas anderes abverlangen - die Rechenoperationen der zweiten Stufe von links nach rechts ab. Damit unterscheiden sich a/b*c und a/(b*c) : Dabei steht

a/b*c für $\mathbf{\frac{a}{b}\cdot c}$, **a/(b*c)** für $\mathbf{\frac{a}{b\cdot c}}$

Tabellenkalkulation und wohl alle Taschenrechner verwenden das Zeichen ‚/' in seiner normalen Bedeutung als Divisionszeichen. Viele Taschenrechner schreiben das Ergebnis wahlweise als rationalen Bruch oder als Dezimalzahl, die Tabellenkalkulation grundsätzlich als Dezimalbruch – also 7/4 = 1,75 (wobei die Anzahl der angegebenen Dezimalstellen einstellbar ist).

Rechenoperationen der 3.Stufe – Potenzieren

Unverzichtbar ist der sichere Umgang mit den binomischen Formeln

$$\mathbf{(a+b)^2}, \quad \mathbf{(a-b)^2} \quad \text{und} \quad \mathbf{(a+b)(a-b)}$$

für das Umformen von Ausdrücken wie z.B. $(3x+2)^2$, $(3x-2)^2$ und $(3x-2)(3x+2)$.

Im Umgang mit Potenzen benötigen Sie nur die drei Rechenregeln

$$\mathbf{a^{m+n} = a^m a^n} \qquad \mathbf{(ab)^m = a^m b^m} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}\ .$$

Für ganzzahlige Exponenten gibt es dabei keine Einschränkungen an die Basis a – für rational-gebrochene oder allgemeine nicht-ganzzahlige Exponenten ist dieser Ausdruck aber nur für eine positive Basis a eindeutig definiert. Für allgemeine nicht-ganzzahlige Exponenten α und eine positive Basis x nutzt ein Rechner den Zusammenhang $\mathbf{x^{\alpha} = e^{(\alpha \cdot \ln x)}}$.
Für eine negative Basis a und rationale Exponenten p/q kann das Ergebnis rechnerabhängig sein (siehe unten unter Wurzelziehen).

Mit den obigen drei Rechenregeln verträglich ist auch die Schreibweise mit negativen Exponenten

$$\mathbf{a^{-m} = \frac{1}{a^m}} \qquad \text{speziell auch} \qquad \mathbf{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

Achtung: Die Schreibweise $\mathbf{a^{m^2}}$ - z.B. bei der z.B. in der Wahrscheinlichkeitsrechnung auftretenden Funktion e^{-x^2} - ist von $\mathbf{(a^m)^2}$ zu unterscheiden. Verzichtet man in der Schreibweise auf Klammern, so gilt $\mathbf{a^{m^2} = a^{(m^2)}}$.

Nicht alle Programmiersprachen verfügen über Operationszeichen für das Potenzieren – so wird in C das Potenzieren nicht als Operation, sondern als Aufruf einer Funktion power(a,n) geschrieben. Fortran-Sprachen nutzen **, die EXCEL/OpenOffice Tabellenkalkulation ver-wendet ∧ als Zeichen für das Potenzieren.
Um Ausdrücke wie $\mathbf{a^{m^2}}$ auszuwerten, ist also z.B. $2^{3^2} = 2^9 = 512$ als 2^(3^2) einzugeben, $(2^3)^2 = 8^2 = 64$ dagegen als (2^3)^2. Um die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ zu tabellieren, müssen die Funktionswerte über 2,71..^(-(x^2)) bereitgestellt werden.

Rechenoperationen der 3. Stufe – Wurzelziehen (Radizieren)

Fehler entstehen nur dort, wo das Wurzelzeichen nicht als Funktion verstanden wird, die nur <u>einen</u> Wert zurückgibt, sondern fälschlicherweise als Symbol für alle Lösungen von Gleichungen wie $x^2 = 9$.
Die exakte Definition für (reelle) Wurzeln ist

$$\mathbf{\sqrt[n]{x}} \quad = \quad \underline{\text{größte}} \text{ (reellwertige) Lösung x der Gleichung } \quad x = w^n$$

Also ist $\sqrt{256} = +16$ und nicht $\sqrt{256} = \pm 16$, $\sqrt[3]{512} = +8$ $\sqrt[3]{-512} = -8$.

Sehr bequem ist die Schreibweise von Wurzeln als Potenzen mit gebrochenem Exponenten

$$\mathbf{\sqrt[n]{x} = x^{(1/n)}}$$

für die Verringerung der Anzahl von Regeln für das Ableiten und Integrieren (→ später). Mit dieser Schreibweise gilt $\mathbf{\sqrt[n]{(x^m)} = x^{m/n} = (x^{(1/n)})^m}$.
Verwendet man diese Schreibweise jedoch für eine negative Basis x < 0, so ergibt sich für

$$\mathbf{\sqrt[4]{(x^6)} = x^{6/4} = x^{3/2} = \sqrt[2]{(x^3)}}$$

ein offensichtlicher Widerspruch beim Auswerten der beiden Ausdrücke: Während der linke Ausdruck existiert, da $x^6 > 0$, ist der rechte nicht auswertbar, da für $x^3 < 0$ keine reelle (Quadrat-)wurzel existiert. Deshalb ist für eine negative Basis weder ein rationaler Exponent p/q noch ein nicht-ganzzahliger reellwertiger Exponent sinnvoll – die Reaktion von Rechnern bei Eingabe einer solchen Aufgabe ist vom <u>jeweilig</u>en Rechnertyp abhängig.
Hinweis: Statt $\sqrt{x}^m + y$ wird im weiteren meist die Schreibweise $\sqrt{(x^m + y)}$ verwendet.

Übungsbeispiele zu 1.
Operationen mit Brüchen (und binomischen Formeln):
Addieren Sie, subtrahieren Sie bzw. kürzen Sie

(1) $\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+1)}$; (2) $\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+1)}$; (3) $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x+1)(x-1)}$; (4) $\frac{(x-1)^2}{x^2-1}$ (5) $\frac{\frac{8a+8b}{a+b}}{a-b}$

oder in rechnergerechter Schreibweise

(6) **b/(a+b) – a/(a-b) ;** (7) **a/(2a – b) + b/(2b - 4a) ;** (8) **(a/b - 1) / (b/a - 1) = - a/b**

(9) Sind die beiden Ausdrücke in (4) bzw. (8) nach dem Kürzen den Ausdrücken vor dem Kürzen gleichwertig oder gibt es Werte für x bzw. für a und b, in denen vor dem Kürzen 0/0 kein Ergebnis liefert, nach dem Kürzen aber ein sinnvoller Ausdruck entsteht?

Umformungen mit Brüchen entstehen vor allem durch das Einsetzen von Ausdrücken in Brüche – z.B.

(10) Werten Sie $(a + (1-ax)^{-1}) / (1 + (1-ax)^{-1})$ für $x = 1 / (a-1)$ aus.

(11) Wie rechnen Sie schnell 214^2 aus, wenn die Batterie Ihres Taschenrechners leer ist?

Sie sind gewöhnt, Brüche zu addieren – es kann aber auch sinnvoll sein, Brüche in Summen einfacherer Brüche zu zerlegen (lernen Sie später als Partialbruchzerlegung kennen)

(12) Überprüfen Sie, dass $\frac{3x}{x^2 + 10x + 16} = \frac{A}{(x+8)} + \frac{B}{(x+2)}$, wenn $A = 4, B = -1$ ist.

Sie können dazu natürlich sofort die Zahlenwerte für A, B einsetzen. Sie sollten aber auch einmal erst die Brüche mit A und B addieren und danach überlegen, weshalb für diese Zerlegung nur die hier aufgeführten Werte in Frage kommen.

Umgang mit Potenzen und Wurzeln
Welche anderen Schreibweisen sind den folgenden gleichwertig (Verwendung der Potenzgesetze)

(1) $u^{2n} u^3$ (2) $a^{-1/2}$ (3) $(b^{2m+1})^5$ (4) $2m \sqrt[4]{m}$ (5) $(a+b)^{3/2}$ (6) $\sqrt[10]{(x^2 - 2xy + y^2)^5}$

(6) Was ist richtig $\sqrt{1/x^2 - 2 + x^2} = 1/x - x$ oder $\sqrt{1/x^2 - 2 + x^2} = |1/x - x|$?
Ist die Wurzel für alle $x \neq 0$ überhaupt definiert? Zeichnen Sie die Funktion!

(7) Wie finden Sie reelle Lösungen der Gleichung $(x+1)^4 = 256$?

(8) Unterscheiden sich 3^{2^3} und $(3^2)^3$?

Extremwertaufgaben mit Gleichungsnebenbedingungen fordern das Ersetzen von Variablen unter Verwendung der Nebenbedingungsgleichungen. Soll z.B. die Mantelfläche eines Kegels für eine in diesen Kegel zu füllende Flüssigkeit von 100 cm³ minimal werden, so können Sie Formelsammlungen 2 Formeln entnehmen:

$$\text{Kegelvolumen} = V = \pi R^2 h / 3 \quad , \quad \text{Mantelfläche} = \pi R * \sqrt{R^2 + h^2} = \pi R * (R^2 + h^2)^{1/2} .$$

(9) Wie drücken Sie ($\pi R^2 h/3 = 100$ nutzend) die Mantelfläche so aus, dass sie nur noch von R abhängt.

Welche der nachfolgenden Wurzelausdrücke können auch ohne Wurzel geschrieben werden?

(10) $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ (11) $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ (12) $\sqrt{(a^2 - 2ab + b^2)}$ (13) $a + \sqrt{(1 - 2a + a^2)}$

Wurzelausdrücke im Nenner durch Nutzung der binomischen Formel $(a+b)*(a-b) = a^2 - b^2$ „rational zu machen", kann nicht generell empfohlen werden.

(14) $\frac{\sqrt{(2 - \sqrt{3})}}{\sqrt{(2 + \sqrt{3})}} = 2 - \sqrt{3}$ (15) $\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^6 = (2 - \sqrt{3})^{12} = 3650401 - 2107560*\sqrt{3}$

Das Rationalmachen ist kein Dogma, dem Sie immer folgen müssen. Vergleichen Sie die Genauigkeit der Zahlenergebnisse von (15), wenn Sie für $\sqrt{3}$ Näherungen wie 1,73 oder 1,7321 verwenden

2. Elementare Funktionen

Außer mit Potenzen und Wurzelfunktionen sollten Sie vertraut sein mit

den Exponentialfunktionen und ihren Umkehrfunktionen – den Logarithmen.

und den trigonometrischen Funktionen und ihren Umkehrfunktionen

und den prinzipiellen Verlauf von e^x, $e^{-x} = 1/e^x$, ln(x), sin(x), cos(x), tan(x), arcsin(x) und arctan(x) kennen, ohne erst einen graphikfähigen Taschenrechner befragen zu müssen.

Die Rechengesetze für die Exponentialfunktion sind die Gesetze für das Potenzieren (siehe oben) – die Rechengesetze für die Logarithmen sind

$$\log(x*y) = \log(x) + \log(y), \qquad \log(x/y) = \log(x) - \log(y), \qquad \log(x^y) = y*\log(x) .$$

Während die Generationen vor Ihnen den dekadischen Logarithmus $\log_{10}$ (= lg) für ihre Zahlenrechnungen nutzten, verwenden Techniker heute vorwiegend die Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$ und den natürlichen Logarithmus (ln), mit dem sich alle anderen Exponentialfunktionen (mit a > 0) und Logarithmen ausdrücken lassen:

$$a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{\ln(a) * x} \qquad \log_a(x) = \ln(x) / \ln(a)$$

Die trigonometrischen Funktionen haben Sie für Berechnungen an Dreiecken fleißig benutzt – Sie benötigen aber weniger diese speziellen Berechnungsformeln für Dreiecksflächen oder –seiten als die allgemeinen Eigenschaften wie

Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck, die mit $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ausgedrückt werden

sowie Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln ($\alpha = \beta$) für sin und cos.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha * \cos\beta + \sin\beta * \cos\alpha \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha * \cos\beta - \sin\beta * \cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha * \cos\beta - \sin\alpha * \sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha * \cos\beta + \sin\alpha * \sin\beta$$

und natürlich $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ für jeden Winkel α (häufig auch $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ geschrieben, wobei $\sin^2$ als Funktionsname zu verstehen ist und die Funktion $\sin^2$ als $\sin^2(\alpha) = (\sin\alpha)^2$ erklärt ist)

Eine höchst beliebte Fehlerquelle im Umgang mit den trigonometrischen Funktionen und ihren Umkehrfunktionen ist Möglichkeit, den Winkel im Bogenmaß (rechter Winkel = $\pi/2$) oder im Gradmaß (rechter Winkel = 90°) angeben zu können. Taschenrechner unterscheiden die Winkeleingaben nicht danach, ob Sie ° mit angeben oder nicht, sondern machen dies von der Stellung einer anderen Taste (RAD oder DEGR) abhängig.

Standardfunktionsaufrufe benutzen das Bogenmaß.

Umrechnung **Winkel im Bogenmaß = Winkel im Gradmaß * π/180°**

Übungsbeispiele zu 2.

(1) $\log_4 64$ (2) $\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{4}\log y = \log(\ ?\ )$

(3) Für welche a gilt $\log_a 1 = 0$ **?**

(4) Umrechnung von Winkeln **45° = ?** (im Bogenmaß)

1,324 = ?°

(5) sin2 = sin(2) = ?

(6) Welche Umformungen erlauben Ihnen, die nachfolgenden Ausdrücke so stark zu „vereinfachen":

$$(-\omega e^{at}\sin(\omega t) + a e^{at}\cos(\omega t))^2 + (\omega e^{at}\cos(\omega t) + a e^{at}\sin(\omega t))^2 = e^{2at} * (\omega^2 + a^2)$$

bzw.

$$\sqrt{(-\omega e^{at}\sin(\omega t) + a e^{at}\cos(\omega t))^2 + (\omega e^{at}\cos(\omega t) + a e^{at}\sin(\omega t))^2} = e^{at} * \sqrt{\omega^2 + a^2}$$

(7) $(e^{at} - e^{-at})^2 - (e^{at} - e^{-at})^2 = 4$

Argumente klammern oder nicht? Auch hier sind sich traditionelle Mathematik und Com-puter nicht einig. In Formelsammlungen treffen Sie meist $\sin\alpha$ und auch $\sin 2\alpha$ – natürlich klammern Sie aber $\sin(\alpha+\beta)$. CAS-Taschenrechner verstehen $\sin 2\alpha$ aber nicht als $\sin(2\alpha)$, sondern als $\sin(2) * \alpha = 0{,}909297*\alpha$. Tabellenkalkulation (EXCEL, OpenOffice) und andere Software fordern dagegen, die Argumente immer zu klammern – also sin(2) und nicht sin2.

3. Das Lösen von Gleichungen

Lineare, quadratische, biquadratische Gleichungen

Der sichere Umgang mit einfachen Gleichungen wird ebenfalls vorausgesetzt.
Die Formel zum Lösen einer quadratischen Gleichung $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$ sollte im Kopf gespeichert sein und nicht erst in einer Formeltafel gesucht werden. Sie sollte auch einsatzbereit sein, wenn die Unbekannte nicht x heißt.
Einfache Substitutionen, um biquadratische (und ähnliche) Gleichungen auf eine quadratische zurückzuführen, sollten einsatzbereit sein.

(1) Welche Lösungen hat die Gleichung $a^2 - 4a + 3 = 0$?

(2) Welche (reellen) Nullstellen hat die Funktion $f(x) = 4x^4 - 16x^2 + 12$?

(3) Unter welchen Bedingungen an die nichtnegativen Größen $\omega>0$, R, $L>0$, $C>0$ hat die quadratische Gleichung $\boldsymbol{\omega L \lambda^2 + R \lambda + (\omega L)^{-1} = 0}$ zwei unterschiedliche reelle Nullstellen λ ?

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Wurzeln versucht man durch Quadrieren von diesen Wurzeln zu befreien:

(4) $\sqrt{(x+2)} = \sqrt{(2x-4)}$ (5) $\sqrt{(x+2)} = \sqrt{(2x-4)} + x/2$

(6) $\sqrt{(x+2)} = \sqrt{(2x-4)} + \sqrt{(x/4+1)}$ (7) $\sqrt{(2-x)} + \sqrt{(x-2)} = 3$

(8) In welchen Fällen reicht ein einmaliges Quadrieren, in welchen müssen Sie mehrfach quadrieren? Sind die Lösungen der durch Quadrieren entstehenden Gleichungen auch immer Lösungen der gestellten Wurzelgleichung? Warum nicht?

(9) Kontrollieren Sie Ihre Lösungen auch durch das Zeichnen der beiden Funktionen links und rechts vom Gleichheitszeichen, da eine Lösung x nur vorliegt, wenn beide Funktionen für dieses x den gleichen Funktionswert ergeben.

Goniometrische oder trigonometrische Gleichungen

sind Gleichungen, die nur trigonometrische Funktionen enthalten - z.B. $8\sin x - 3\cos x = 4$. Sie können diese graphisch lösen, indem Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionen $8\sin x$ und $3\cos x + 4$ bestimmen. Da $\sin(x)$ und $\cos(x)$ 2π-periodische Funktionen sind (d.h. $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ für alle x), gibt es natürlich unendlich viele Lösungen – es reicht deshalb, die Lösungen im Intervall $[0, 2\pi]$ zu bestimmen und auf diese Periodizität zu verweisen.
Da Gleichungen wie $\sin x = 0{,}75$ oder $\cos x = -0{,}13$ mittels der Umkehrfunktionen gelöst werden können, versucht man andere Gleichungen auf diesen Fall zurückzuführen, indem man Eigenschaften wie $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ nutzt oder Bezüge zu den oben angegebenen Additionstheoremen verwendet: Teilt man die Gleichung $8\sin x - 3\cos x = 4$ durch $A = \sqrt{(8^2 + (-3)^2)}$, so erhält man

$$8/A \sin x - 3/A \cos x = 4/A.$$

Bestimmt man einen Winkel α z.B. aus den beiden Beziehungen $8/A = \cos\alpha$ und $-3/A = \sin\alpha$, was wegen der speziellen Wahl von A möglich ist (deswegen gilt: $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = (-3/A)^2 + (8/A)^2 = 1$) so ergibt $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha = -3/8$ eine Lösung $\alpha = \arctan(-3/8)$ ergibt, so entsteht damit die Gleichung

$$\sin x * \cos\alpha + \cos x * \sin\alpha = 4/A.$$

deren linke Seite nach den Additionstheoremen aber $\sin(x + \alpha)$ ist. Für die verbleibende Gleichung

$$\sin(x + \alpha) = 4/A$$

erhält man nun die beiden Lösungen aus $x + \alpha = \arcsin(4/A)$ und $x + \alpha = \pi - \arcsin(4/A)$.
(10) Führen Sie die Zahlenrechnung aus und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der graphischen Lösung der Gleichung.
Typisch am gezeigten Vorgehen ist die Verwendung von Eigenschaften der Winkelfunktionen wie Additionstheoreme, Doppelwinkelformeln u.ä.
Überlegen Sie auch, ob für die beiden Lösungen x_1 und x_2 der Gleichungen $\sin x = c$ im Intervall $[-\pi/2, 3\pi/2]$ immer $x_1 + x_2 = \pi$ gilt – unabhängig davon, ob $c \in [-1, +1]$ positiv oder negativ ist!

Exponential- und logarithmische Gleichungen

(11) $27^{x+1} = 32$, (12) $2^{6x-2} = 4^{2x+3}$

löst man durch Logarithmieren beider Seiten der Gleichung, was einfachere Gleichungen für x ergibt.

(13) $3 + 2\,e^{-2x} - 5\,e^{-x} = 0$ wird mit $u = e^{-x}$ zu einer quadratischen Gleichung bzgl. u

(14) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$ kann nicht sofort logarithmiert werden, da es für log (a – b) keine Formel gibt – mit $3^{x+1} = 3^{x} \cdot 3^{1} = 3 \cdot 3x$, $5^{x+2} = 5^{x} \cdot 5^{2} = 25 \cdot 5^{x}$ usw. erhält man aber wieder eine Gleichung der Form $A \cdot 3^{x} = B \cdot 5^{x}$

Logarithmische Gleichungen löst man durch Verwendung von $e^{\ln x} = x$, $10^{\lg x} = x$, $2^{\log_2(x)} = x$ usw. und der weiteren Logarithmengesetze

(15) $\log_4(x+1) = 3$ (16) $\ln(2x+3) = 5$ (17) $2 \lg(2) + \lg(x-3) = ½ * (\lg(5x+1) + \lg(x-6) + \lg(3))$

seien Beispiele hierfür.

Sehr viele Gleichungen erlauben aber keine explizite Auflösung nach der gesuchten Lösung, so dass dann **Näherungsverfahren** wichtig werden, die im Studium geboten werden. Sobald aber ein Umstellen der Gleichung nach der gesuchten Unbekannten möglich ist, sollten Sie dies auch nutzen. Hier noch ein Beispiel dazu

Für das Anwachsen einer (Anfangs-)Geldmenge G_0 über n Jahre auf G_n bei einer jährlichen Verzinsung zum Zinssatz z (z.B. 2,5%) gilt die Formel

$$G_n = G_0 * (1 + z)^n .$$

(18) Wie lösen Sie diesen Zusammenhang – bei vorgegebener Endmenge G_n (z.B. 50000 €) - nach n auf (wenn G_0 und z bekannt – z.B. G_0 = 25000 € und z = 2,5%) ? Wie nach z, wenn G_0 und n gegeben sind ? Die Gleichungen beantworten damit die Fragen „In wie vielen Jahren verdoppelt sich das Guthaben beim fixiertem Zinssatz 2,5%?" und „Wie hoch müsste der Zinssatz sein, damit sich das Anfangsguthaben in n (z.B. =12) Jahren verdoppelt?"

4. Lineare Gleichungssysteme

Die meisten von Ihnen kennen Vorgehensweisen, um kleine Gleichungssysteme mit nur sehr wenigen Gleichungen nach den Unbekannten aufzulösen. Dabei lag der Schwerpunkt der Schulausbildung in der Ausnutzung von Besonderheiten jedes konkreten Gleichungssystems (was zu Begriffen wie Additionsverfahren, Subtraktionsverfahren, Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren führte).
Diese Vorgehensweisen sollten Sie auch nicht vollkommen vergessen – aber Taschenrechner (nicht nur CAS –TR) und andere Software erlauben sehr rasch Gleichungssysteme zu lösen, wenn Sie sie in einer standardisierten Form eingeben. Und davon sollten Sie auch Gebrauch machen, wenn in anderen Fachgebieten Gleichungssysteme aufzustellen und zu lösen sind.

Schreiben Sie ein Gleichungssystem deshalb übersichtlich – nach den Unbekannten entsprechend geordnet (damit im Studium sofort die Matrixschreibweise verwendet werden kann):

Also statt

$$3x = 4y - 15$$
$$5y = 11 - 4x$$

besser

$$3x - 4y = 15$$
$$4x + 5y = 11$$

(CAS-TR kämen auch mit der linken Form zurecht – für andere ist die rechte Form Pflicht.)

Wiederholen Sie Ihre Kenntnisse, wie Gleichungssysteme gelöst werden können, an den nachfolgenden Beispielen, damit Sie auch die Lösung erhalten könnten, wenn mal kein Rechner verfügbar wäre – aber trainieren Sie dabei nicht die Rechengeschwindigkeit – Sie sind doch langsamer als die moderne Technik, wenn Sie erst mal wissen, wie ein Gleichungssystem korrekt einzugeben ist.

$$18\,x - 15\,y = 22{,}4$$
$$37\,x + 20\,y = 280{,}2$$

$$13\,x + 0\,y + 12\,z = 33$$
$$8\,x - 12\,y + 4\,z = 17{,}9$$
$$-3\,x + 4\,y - 6\,z = -4{,}3$$

Zu Ihrer Kontrolle die Lösungen:

x = 5,08306… y= 4,60633… x = 3,07058…, y = 0,36323…, z = -0,57647…

Auch wenn in der Aufgabenstellung nur ganze Zahlen auftreten ist in der Regel die Lösung nicht-ganzzahlig. Der Vergleichbarkeit der Lösungswerte wegen, nutzen Sie aber die Darstellung mit (auf entsprechende Stellenanzahl gerundeten) Dezimalbrüchen – auch wenn der eine oder andere Taschenrechner Ihnen das Ergebnis als $x = 2088/680$ statt $3{,}07058\ldots$ anbietet.

Der heute verbreitetste Algorithmus für Rechner ist der Gaußsche Algorithmus, da es dem Rechner gleichgültig ist, ob er mit ganzen Zahlen oder „krummen" Dezimalbrüchen operiert. Wichtiger als das formale Lernen dieses Wegs ist für mich aber Ihr Vermögen Gleichungssysteme entsprechend der Regeln der Anwendungsfachgebiete aufzustellen. Das folgt aber im Studium.

5. Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen

Einfache Ungleichungen können Sie sowohl rechnerisch als auch graphisch lösen. Die graphische Lösung erfordert nur das Zeichnen der in der Ungleichung vorkommenden Funktionen – z.B.

$$2x + 3 < x^2 - 3x + 12.$$

Für die rechnerische Lösung ist es wieder wichtig Umformungen zu verwenden, die die Lösungsmenge einer Ungleichung (d.h. die Menge aller Variablen, welche die Ungleichung erfüllen) nicht verändern – weder verkleinern noch vergrößern. Im weiteren bedeute $\Leftrightarrow$ dass links und rechts stehende Ungleichungen die gleiche Lösungsmenge besitzen:

$f(x) < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$

oder Addition einer Konstanten oder einer Funktion h(x) ändert die Lösungsmenge nicht.

$f(x) < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)*h(x) < g(x)*h(x)$, wenn $h(x) > 0$ für alle x

$f(x) < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)*h(x) > g(x)*h(x)$, wenn $h(x) < 0$ für alle x

oder Multiplikation bzw. Division mit einem positivem Faktor ändert Ungleichungsrichtung nicht aber Multiplikation bzw. Division mit einem negativen Faktor ändert Ungleichungsrichtung.

$f(x) < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad [f(x)]^2 < [g(x)]^2$, wenn f und g positive Funktionen.

$f(x) < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{[f(x)]} < \sqrt{[g(x)]}$, wenn f und g positive Funktionen.

$f(x) < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \ln[f(x)] < \ln[g(x)]$, wenn f und g positive Funktionen.

Die Betragsfunktion $|x| = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$

erleichtert die Beschreibung der „Umgebung eines Punktes" auf der x-Achse

$2 - \varepsilon < x < 2 + \varepsilon$ ist gleichbedeutend mit $|x - 2| < \varepsilon$

Multiplizieren oder Dividieren Sie mit einer Funktion h(x), deren Werte für verschiedene x unterschiedliche Vorzeichen haben, so sind entsprechende Fallunterscheidungen notwendig.

Beispiel zur Lösung der Ungleichung $(x + 1) / (x - 1) \geq 3$

Durch Multiplikation mit dem Nenner entstünden links und rechts lineare Ausdrücke – da dieser aber für $x > 1$ positiv, für $x < 1$ negativ ist, ist die folgende Fallunterscheidung nötig

$x > 1: \quad (x + 1) / (x - 1) \geq 3 \;\Leftrightarrow\; x + 1 \geq 3(x-1) \;\Leftrightarrow\; 0 \geq 3(x-1) - (x+1) = 2x - 4 \;\Leftrightarrow\; x \leq 2$

da diese Ungleichung aber unter der Voraussetzung $x > 1$ entstand, folgt $-1 < x \leq 2$

$x = 1$ linker Ausdruck nicht definiert – damit x keine Lösung

$x < 1: \quad (x + 1) / (x - 1) \geq 3 \;\Leftrightarrow\; x + 1 \leq 3(x-1) \;\Leftrightarrow\; 0 \leq 3(x-1) - (x+1) = 2x - 4 \;\Leftrightarrow\; x \geq 2$

die entstandene Ungleichung widerspricht aber der Voraussetzung $x < 1$

Lösungen sind damit nur Zahlen $x \in (1, 2]$.

$\Leftrightarrow$ steht hier wieder zwischen zwei Ungleichungen, deren Lösungsmenge gleich ist

Weitere Beispiele:
(1) $(x^2 - 4x) / (2x-5) <= 1$
(2) $| x^2 - 4x | < 2x - 5$ Fallunterscheidung wegen Betragsfunktion
(3) $(x - 5) / (x^2 - 3x + 12) > 2$ zunächst Vorzeichen der Nennerwerte klären
(4) $| x-3 | < - x^2 + 196$
(5) für welche n gilt $(1-p)^n \geq 0{,}95$, wenn $p = 0{,}12$?

6. Umgang mit Dimensionen und %

In den technischen Disziplinen sind die Größen in der Regel mit Dimensionen versehen. Die Rolle der „Vorsilben"

femto, pico, micro, milli, centi, dezi, Deka, Hekto, Kilo, Mega, Giga, Tera, Peta
zu Maßeinheiten sollte klar sein – und die Umrechnung mit den entsprechenden 10er-Potenzen keine Schwierigkeiten bereiten.
Aber schon % als „Kürzel“ für $*10^{-2}$ bereitet einigen immer wieder Schwierigkeiten.
$83\% = 83*10^{-2} = 0{,}83$; $0{,}0071 = 0{,}71\%$
0,08% ist also weder 0,008, noch 0,00008, sondern 0,0008.

7. Reihen

sind endliche oder unendliche Summen, wobei wir an Formeln interessiert sind, die uns die Addition der mitunter auch im endlichen Fall sehr vielen Summanden ersparen sollen.
Nur für wenige Reihen ist deren Summe eine kurze Formel – die praktisch häufigsten sind die arithmetische und die geometrische Reihe, deren Berechnungsformeln sie kennen sollten.

Arithmetische Reihe $S = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ mit $a_k = a_0 + k\Delta$
aufeinander folgende Summanden unterscheiden sich um eine konstante Differenz Δ
$$S = (a_0 + a_n) * (n+1)/2$$

Geometrische Reihe $S = 1 + q^1 + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ wenn $q \neq 1$

Beispiele.
(1) Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10000.
(2) Mit jährlichen Zinsen (zum Zinssatz z) ergibt das Sparen von jeweils B € am Jahresanfang jedes Jahres nach n Jahren einen Kontostand S auf dem Sparbuch
$$S = B(1+z)^n + B(1+z)^{n-1} + \ldots + B(1+z)^2 + B(1+z)$$

8. Vektorrechnung

Die natürliche Quelle der Vektorrechnung ist die Physik / Mechanik mit der Addition gerichteter Größen – sie ist aber heute auch wichtigstes Hilfsmittel für geometrische Aufgaben inklusive der Darstellung von 3d-Szenen auf dem Rechnerbildschirm, wobei die geometrischen Operationen
Addition / Subtraktion
Multiplikation mit einem skalaren (d.h. Zahlen-)Faktor
Skalarprodukt
Vektorprodukt
durch Operationen mit ihren Koordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auch „ohne Geometrie“ mit bloßer Rechnung ausführbar sind. Wohin dabei der Koordinatenursprung gelegt wird und wie die Koordinatenachsen gerichtet sind, ist physikalisch absolute Willkür und für die Computergeometrie an Zweckmäßigkeitsüberlegungen angepasst. Formeln für die Operationen mittels der Vektorkoordinaten enthält jede Formelsammlung. Um Vektoren von „normalen Zahlen“ unterscheiden zu können wird über den Vektorbezeichner ein Pfeil gesetzt – was schreibtechnisch nicht immer unterstützt wird – oder der Vektorbezeichner wird **fett** gedruckt (nachfolgend verwendet). Die Koordinaten eines Vektors werden senkrecht untereinander (als „Spalte“) aufgeführt, z.B.
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$
was – um Platz zu sparen – unter Verwendung der Operation ^{T}, welche Zeilen in Spalten und Spalten in Zeilen wandelt („transponiert“), eine leichter zu schreibende Variante ergibt:
$$\mathbf{a} = (2,\ 3,\ 5)^T ,$$

Aufgaben:
(1) Berechnen Sie $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$; $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, die Längen der beiden Vektoren und den von **a** und **b** eingeschlossenen Winkel, wenn $\mathbf{a} = (2,\ 3,\ -7)^T$ und $\mathbf{b} = (-5,\ -2,\ 4)^T$.
(2) Welche Länge hat die (senkrechte) Projektion des Vektors **b** auf die Richtung **a** ?
(3) Wie kann man die Gleichung einer Geraden in der x-y-Ebene mit der Richtung $\mathbf{r} = (1; -2)^T$ durch den Punkt $P_0 = (2,\ 1)$ ausdrücken?
a) in der Parameterform $\mathbf{OP} = \mathbf{OP}_0 + t\,\mathbf{r}$

OP bezeichnet den Vektor vom Koordinatenursprung O zum Punkt P der Gerade
b) in der parameterfreien Form, d.h. als Gleichung $Ax + By = C$ mit geeigneten Zahlenwerten für A, B, C

(4) Sind die in (3) gebildeten Beschreibungen der Gerade eindeutig – oder gibt es mehrere Möglichkeiten, diese Gerade in Parameter- bzw. in parameterfreier Form zu schreiben?

(5) Wie bestimmen Sie den Schnittpunkt zweier Geraden
a) beide in Parameterform,
$(0, 4)^T + t(1, 3)^T$ und $(4, 0)^T + s(2, 4)^T$
b) beide in parameterfreier Form
$2x + 4y = 12$ und $4x + 8y = 26$
c) eine in Parameter-, die andere in parameterfreier Form
$(0, 4)^T + t(1, 3)^T$ und $2x + 4y = 12$

In welchen dieser Fälle entsteht ein Gleichungssystem aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten?
In welchen Situationen schneiden sich die beiden Geraden nicht in einem einzigen Punkt – welche Situationen sind generell möglich – was passiert dabei beim Versuch, <u>den</u> Schnittpunkt zu bestimmen?

(6) Was beschreibt die Parameterform $\mathbf{OP} = \mathbf{OP}_0 + t\,\mathbf{r}$, wenn nur nichtnegative t zugelassen sind?

Analog zu den Aufgaben (3) – (6) können Schnittsituationen im Raum berechnet werden. In der Computergeometrie ist dabei der Schnittpunkt einer Geraden (genauer eines Beobachtungsstrahles) mit einer Körperoberfläche – im einfachsten Falle die Oberfläche aus vielen Dreiecken zusammengesetzt. Für eine Gerade bzw. einen Strahl im Raum ist nur die Beschreibung in Parameterform möglich, Ebenen im Raum können dagegen wieder sowohl im Parameterform mit zwei voneinander unabhängigen Richtungsvektoren der Ebene als auch in parameterfreier Form beschrieben sein.

(7) Wie kann man die Gleichung einer Ebene im x-y-z-Raum ausdrücken, der die drei Punkte (2, 3, 4), (3; 4; 5) und (2, 4, 9) angehören
a) in der Parameterform $\mathbf{OP} = \mathbf{OP}_0 + u\,\mathbf{a} + v\,\mathbf{b}$ mit Richtungsvektoren **a, b** und Parametern u, v
b) in der parameterfreien Form, d.h. als Gleichung $Ax + By + Cz = D$ mit geeigneten Zahlenwerten für A, B, C, D

(8) Sind die in (7) gebildeten Beschreibungen der Ebene eindeutig – oder gibt es mehrere Möglichkeiten, diese Ebene in Parameter- bzw. in parameterfreier Form zu schreiben?

(9) Wie bestimmen Sie den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene
a) beide in Parameterform,
$(0, 4, 5)^T + t(1, 3, 2)^T$ und $(4, 0, 3)^T + u(2, 4, 6)^T + v(-2, 4, 3)^T$
b) eine in Parameter-, die andere in parameterfreier Form
$(0, 4, 2)^T + t(1, 3, 4)^T$ und $2x + 4y - 7z = 13$

In welchen dieser Fälle entsteht ein Gleichungssystem aus 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten?
In welchen Situationen schneiden sich Gerade und Ebene nicht in einem einzigen Punkt – welche Situationen sind generell möglich – was passiert dabei beim Versuch, <u>den</u> Schnittpunkt zu bestimmen?

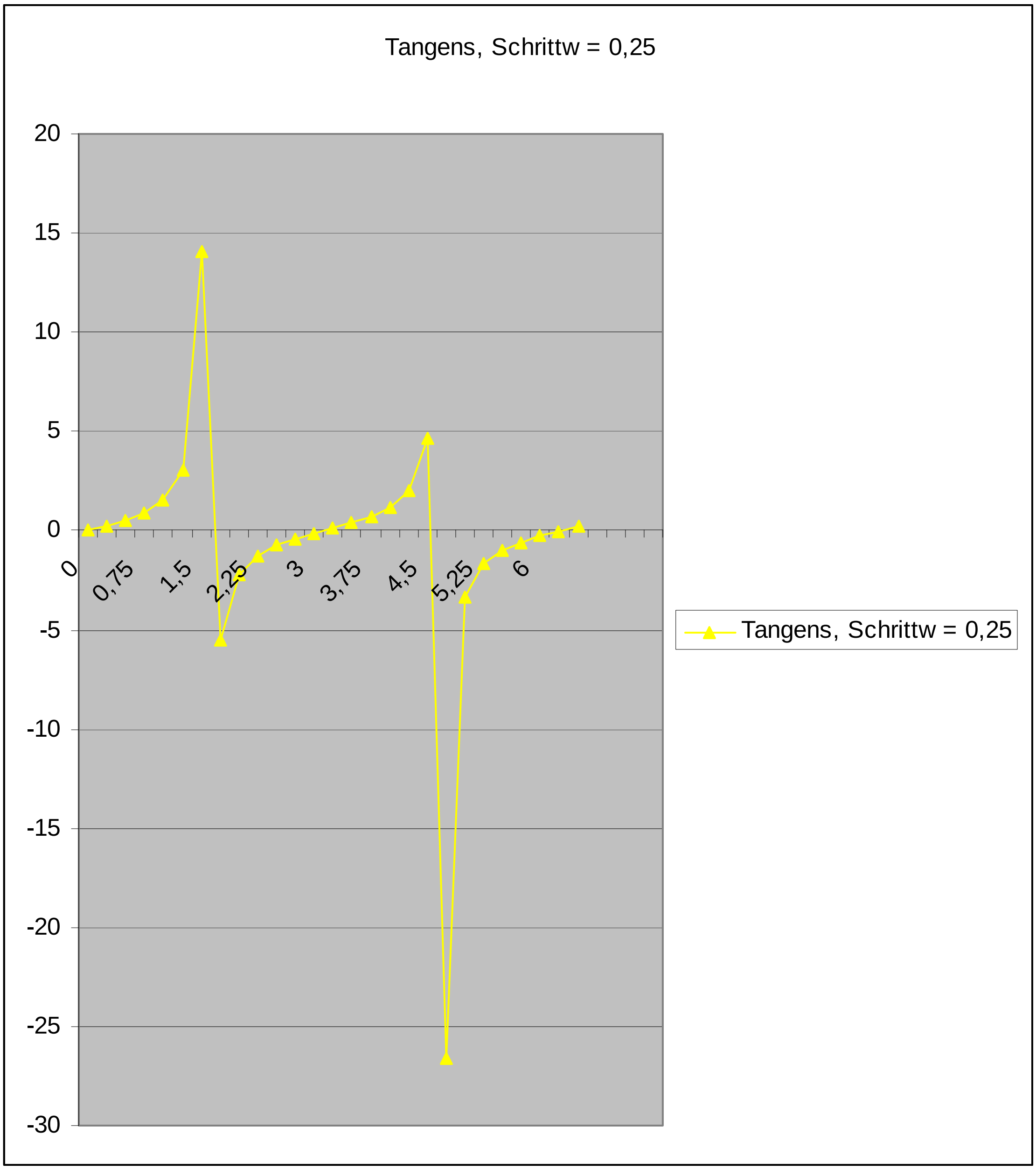
(10) Welchen Teil einer Ebene beschreibt die Parameterform $\mathbf{OP} = \mathbf{OP}_0 + u\,\mathbf{a} + v\,\mathbf{b}$, wenn nur nicht-negative Parameter u und v zugelassen sind?

9. Funktionen – Definitionsbereich, Umkehrfunktionen, Graph einer Funktion

Im Mathematikunterricht wird normalerweise der maximale Definitionsbereich einer Funktion in den Mittelpunkt gerückt, untersucht und gezeichnet. Für das Zeichnen wird dabei die Kurvendiskussion unter Verwendung von Ableitungen favorisiert, mit denen markante Punkte (Maxima, Minima, Wendepunkte) gesucht werden, die ein Gerüst für das Skizzieren des Funktionsablaufs bilden. Diese mehrere Jahrhunderte alte Untersuchungsmethodik wird heute durch graphikfähige TR und Tabellenkalkulation mit Graphikassistenten ergänzt.

Was sind die Vorteile und Nachteile der beiden Möglichkeiten.

a) Zeichnen auf der Grundlage sehr vieler Funktionswerte ist nur für Funktionen möglich, in denen keine weiteren Parameter vorkommen – d.h. man kann sich die Funktion $f(x) = \sqrt{(9 - x^2)}$ zeichnen lassen – aber nicht die Funktion $f(x) = \sqrt{(R^2 - x^2)}$, solange R noch kein Zahlenwert zugewiesen ist. Für diese Zeichnung sind keine Ableitungen zu bilden, keine Gleichungen zu lösen – allerdings kann die auf einzelnen Funktionswerten aufgebaute „Rechnergraphik" auch einen falschen Eindruck vermitteln, wie das nachfolgende Bild der Tangensfunktion mit einer (zu groben) Schrittweite von 0,25 zeigt. Die berechneten Punkte (k*0,25; tan(k*0,25)) (k = 0, …, 26) werden durch gerade Strecken verbunden – und die Besonderheit der Tangensfunktion bei $x = \pi/2$ und $x = 3\pi/2$ ist vollkommen verloren gegangen.



Mit einer kleineren Schrittweite z.B. 0,05 wird der gezeichnete Graph schon tangens-ähnlicher – die Polstellen kann man jetzt an den richtigen Stellen erahnen, das Wissen um das Aussehen des Tangens dabei nutzend.
Die gleichen Schwierigkeiten gelten für eventuell vorhandene Sprungstellen einer Funktion, welche mit endlichen vielen Funktionswerten ebenfalls nicht exakt gezeichnet werden können.
Für die meisten technischen Anwendungen ist dies aber kein Hindernis, wenn man um die Rechnung im Hintergrund für das Erstellen der Zeichnung Bescheid weiß.

b) extremwertverdächtige Punkte können mit Hilfe der Ableitungen auch für Funktionen gefunden werden, welche noch von weiteren Größen abhängen wie etwa die Funktionen $\sqrt{(R^2 - x^2)}$, deren maximaler Wert R bei $x = 0$ erreicht wird und deren minimale Werte 0 bei $x = +R$ und $-R$ auftreten (hier ist aber die erste Ableitung nicht 0, sondern sie existiert nicht!). Allerdings ist diese Methodik nur auf Funktionen anwendbar, für die Ableitungen existieren – was voraussetzt, dass sie über einem Intervall in allen Punkten definiert sind.

Welches der beiden Werkzeuge (Graphik oder „klassische" Kurvendiskussion) sie im konkreten Fall einsetzen, haben Sie zu entscheiden. Und dazu muss man eben an einfachen Beispielen beide „Werkzeuge" auszuprobieren.

Vom **„natürlichen"** Definitionsbereich einer Funktion ist der **modellmäßig** – technische zu unterscheiden – d.h. im Allgemeinen gilt ein Zusammenhang nur ausreichend genau in einem bestimmten Intervall – z.B. gilt die lineare Dehnung unter Krafteinwirkung nur bis zu einer gewissen materialabhängigen Höchstgrenze. Damit ist die Suche nach größten oder kleinsten Funktionswerten i.a. eine Suche über dem technisch sinnvollen Definitionsbereich.

Wichtig sind aber Zusammenhänge zwischen der ersten Ableitung und dem Monotonie-(d.h. Wachstums-)Verhalten einer Funktion. Ob eine Funktion in einem Intervall [a, b] wächst oder fällt, kann man an der Graphik sehen – aber auch am Vorzeichen der ersten Ableitung erkennen.

(1) Welche der nachfolgenden Funktionen f(x) wachsen über ihrem gesamten natürlichen Definitionsbereich, welche nur über bestimmten Intervallen (über welchen?)?

x, x^2, x^3, x^n (n = gerade und positiv), $\sqrt{x}$, x^α (α positiv, aber nicht ganzzahlig)

$e^{\lambda x}$ ($\lambda > 0$), $\ln(x)$, $\lg(x)$,

$\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\arcsin(x)$; $\arctan(x)$

(2) Wie untersuchen Sie Funktionen wie

$P(x) = 3x^2 + 2x - 12$ oder $f(x) = x + \sin x$ oder $f(x) = x^x$,

auf Intervalle, in denen die Funktion monoton wächst?

Umkehrfunktionen existieren nicht nur für die einige der elementaren Funktionen – ist eine Funktion auf einem Intervall $\langle a, b\rangle$ so beschaffen, dass jeder der möglichen Funktionswerte nur für ein einziges x angenommen wird, so besitzt die Funktion f auf dem zu $\langle a, b\rangle$ gehörigen Wertebereich eine Umkehrfunktion, die auch mit f^{-1} bezeichnet wird. **Der Funktionswert $f^{-1}(y)$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung $f(x) = y$.**

(3) Geben Sie für die nachfolgenden Funktionen f deren Umkehrfunktionen f^{-1} an:

$f(x) = (\sqrt{x} - 4) / (\sqrt{x} + 1)$

$f(x) = (1 - \sqrt{(1+x)}) / (1 + \sqrt{(1+x)})$

$f(x) = e^{-x^2} = \exp(-x^2)$ für $x \geq 0$

Achtung: Verwechseln sie nicht f^{-1} (hier ist $^{-1}$ ein Teil des Funktionsnamens – ihnen bekannt von den TR-Tasten als $\sin^{-1} = \arcsin$ oder $\tan^{-1} = \arctan$) **mit $1/f(x)$.** Natürlich ist die Bezeichnung $^{-1}$ Anlass zu Verwechslungen. So bezeichnet eben e^{-1} nicht die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, sondern wie für Zahlen üblich $e^{-1} = 1/e$. Sie könnten aber die Exponentialfunktion e^x als $\exp(x)$ schreiben - wie in vielen Softwareaufrufen üblich – und dann statt des natürlichen Logarithmus $\exp^{-1} = \ln$ schreiben. Dann wäre $^{-1}$ wieder ein Teil des Funktionsnamens. Nur ist das nicht üblich, weil die Logarithmusfunktion ihren eigenen Namen und ihr eigenes Kürzel **ln** schon besitzt (und dies auch noch kürzer ist als $\exp^{-1}$).

Für das Bilden von Ableitungen und einfache Extremwertaufgaben beschränken wir uns bei dieser Erinnerung auf das Ableiten von Polynomen (= ganzen rationalen Funktionen) und die Verwendung von Produkt- und Quotientenregel (Kettenregel folgt nochmals ausführlich im Studium).
Eine Funktion f abzuleiten bedeutet, eine neue Funktion f ' bereitzustellen, deren Funktionswerte f '(x) den Anstieg der Funktion f an der Stelle x angeben.

Die Tabelle der Ableitungen der Grundfunktionen enthält jede Zahlentafel.

Bemerkung zu Polynomen

- Für das Ableiten von Polynomen ist die Darstellung als Summe der Potenzen vorteilhaft, weil Sie hier die einzelnen Summanden ohne Schwierigkeit ableiten können und die Rechenregeln
  $(f + g)' = f' + g'$ und $(cf)' = c f'$ wobei cf als $(cf)(x) = c \cdot f(x)$ definiert ist.
- Dagegen ist diese Gestalt für das Auffinden der Nullstellen eines Polynoms wenig geeignet, da nur für ein quadratisches Polynom einfache Formeln für die Berechnung der Nullstellen existieren – Formeln für Polynome 3. Grades (die Formeln von Cardano) sind so kompliziert, dass sie heute wohl überall in der Praxis durch Iterationsformeln (etwa dem Newtonverfahren) verdrängt sind. Sollte also bei der Suche nach Nullstellen eine Funktion schon die Gestallt $(x^2 +4)(x^2 -4x+3)$ haben, so untersucht man die Faktoren – zur Form $x^4 – 4x^3 + \ldots$ überzugehen, wäre unsinnige Zeitvergeudung

Beispiele: Bilden Sie die erste Ableitung von

(1) $P(x) = 3x^2 + 2x -12$
(2) $P(x) = 12x^4 -6x^3 + 8x^2 - 4x + 8$
(3) $f(x) = 3x + 12 – 6x^{-1}$
(4) $f(x) = \sqrt{x} + 2/\sqrt{x}$
(5) $f(t) = e^t \cdot \sin t$
(6) $f(x) = x * \ln x$
(7) $f(x) = \tan(x) = \sin(x) / \cos(x)$
(8) $f(x) = \sin(x) / x$
(9) $f(x) = 3x +4$

Verlauf von Kurven – Stellen x_E einer Funktionen f(x) sind **extremwertverdächtig**, wenn
$f'(x_E) = 0$ oder $f'(x_E)$ nicht existiert.
Ob wirklich eine Minimum oder ein Maximum bei x_E vorliegt, muss durch die Untersuchung der Umgebung von x_E festgestellt werden.

Bestimmen Sie die extremwertverdächtigen Stellen der nachfolgenden Funktionen
(10) $P(x) = 3x^2 + 2x -12$
(11) Hat ein Polynom dritten Grades immer extremverdächtige Stellen? Vergleichen Sie
$f(x) = x^3$, $f(x) = x^3 + 2x$; $f(x) = x^3 - 2x$
(12) $f(x) = 3x + 12 – 6x^{-1}$
(13) $f(x) = \sqrt{x} + 2/\sqrt{x}$
(14) $f(x) = \ln x / x$
(15) $f(t) = e^t \cdot \sin t$ (Schwingung mit exponentiell ansteigender Amplitude)
Die Gleichung $f'(x) = 0$ muss aber nicht elementar lösbar sein.
(16) $f(x) = \sin(x) / x$

Außerdem ist die Suche nach dem kleinsten oder größten Funktionswert über einem Intervall von der „klassischen Suche“ nach extremwertverdächtigen Stellen zu unterscheiden

(17) Wo nimmt die Funktion $f(x) = 3x+4$ ihr Maximum, wo ihr Minimum auf dem Intervall [0; 10] an. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit Aufgabe (9)!

Zu (17) analoge Extremwertaufgaben mit linearen Ausdrücken mit vielen Variablen und linearen Ungleichungen als Nebenbedingungen bilden heute den Gegenstand der linearen Optimierung, deren Algorithmen ganz ohne Ableitungen auskommen.

10. Mengen, Aussagen, Verneinung von Aussagen

Der Mengenbegriff und die Verknüpfungen
Vereinigung $A \cup B$
Durchschnitt $A \cap B$
Differenz $A \setminus B$
sollten ebenso bekannt sein wie der Teilmengenbegriff $A \subseteq B$, mit dem beschrieben wird, dass jedes Element der Menge A auch B angehört.

Die Zugehörigkeit eines Elements a zur Menge A wird mit $a \in A$ beschrieben.

Nicht nur die Mathematik verwendet Aussagen – Sätze, die wahr oder falsch sein können.
Die klassische zweiwertige Logik geht davon aus, dass eine Aussage entweder **wahr** oder **falsch** ist (Satz vom ausgeschlossenen Dritten). Die Verneinung einer wahren Aussage (2 ist eine Primzahl) ergibt damit eine falsche 2 ist keine Primzahl), die Verneinung einer falschen (Der Mond ist ein Quarkkuchen) eine wahre Aussage (der Mond ist kein Quarkkuchen).

Die Verneinung einer verneinten wahren Aussage ist wieder wahr – dies **doppelte Verneinung** ist aber davon zu unterscheiden, was in manchen Sprachen (z.B. slawischen) aber auch in manchen deutschen Dialekten eine verstärkende Verneinung darstellt

Des måcht kaa Mensch ned. ist als verstärkende, nicht als doppelte Verneinung gedacht

Aber schon mit einer einfachen Verneinung haben viel ihre Schwierigkeiten – besonders wenn es sich um eine Aussage über alle Elemente einer Menge oder über wenigstens ein Element handelt.

Die Aussage „Alle Primzahlen sind ungerade Zahlen“ ist falsch – auch 2 ist eine Primzahl

Die korrekte Verneinung ist nun nicht – wie häufig falsch gebildet „Keine Primzahl ist gerade“ –, sondern „Es gibt wenigstens eine Primzahl, die nicht ungerade ist.“

Die korrekte Verneinung der (falschen) Aussage
„Jede quadratische Gleichung hat zwei reelle Nullstellen“
ist die wahre Aussage
„Es gibt wenigstens eine quadratische Gleichung, die nicht zwei reelle Nullstellen besitzt“.

Die falsche Aussage
„Es gibt wenigstens eine reelle Lösung der Gleichung $x^2 = -1$“„
wird – richtig verneint – die wahre Aussage
„Für jede reelle Zahlen gilt, dass sie keine Lösung der Gleichung x^2 -1 ist.“

Ein sauberer und gleichzeitig formalisierbarer Weg zur Bildung von Verneinungen wird in den Informatikveranstaltungen im Studium geboten
.
Und nun verneinen Sie zur Übung die Aussage
„Es gibt eine Katze, die klüger ist als jede Maus.“